Entropie, Information und Freiheit; Leonard Susskinds Darstellung der Thermodyanmik; Teilchen, System, Besetzungszahlen, Besetzungswahrscheinlichkeiten; Entropie; Maximierung der Entropie; Zustandssumme und Temperatur; Helmholtz' Freie Energie und Druck; Druckverlauf auf Isentropen; Fluktuationen

(HTML Version)

ein Ausschnitt aus dem Buch

Das Zinsvorzeichen

Eine konzentrierter Geisteserguss gegen das kluge Böse.

von Tim Deutschmann (Physiker)

www.tim-deutschmann.de

(E-Mail)

Inhaltsverzeichnis

Entropie, Information und Freiheit

Grundsätzlich ist zu fragen, warum es Sinn machen könnte Konzepte der Physik, die zunächst nur zur Beschreibung der Natur und der Dynamik toter Materie verwendet werden können, zur Beschreibung sozio-ökonomischer und soziologischer Phänomene heranzuziehen. Die Begründung stützt sich auf folgende Tatsachen.

- Alle Menschen eines Währungsraums sind über das Geldsystem miteinander verkoppelt. Das Geld des Geldsystems wird infolge des Rechtsstaatsprinzips als eine Erhaltungsgröße behandelt. Transaktionen, die über das Geldsystem laufen sind berechenbar. Menschliches Verhalten ist, sofern es sich um routiniertes, planbares oder gewohnheitsmäßiges Verhalten handelt berechenbar. Es existieren Persönlichkeits- oder Charaktermodelle, die als Heuristiken für den berechenbaren Teil der menschlichen Seele dienen können. Die Sozialisation eines Menschen, also der internalisierte, akkumulierte Umweltkontakt, die Summe der Welterfahrung, usw. die sich effektiv in feststehenden, also berechenbaren Persönlichkeitsstrukturen darstellt, bildet daher den berechenbaren Teil menschlichen Verhaltens und kann daher als Teil des geltenden Toten angesehen werden.

- Die unberechenbare Komponente erscheint in der Kontingenz menschlichen nicht-regelkonformen Verhaltens, der menschlichen Willkür.
- Geld hat die Einheit Energie, und die Einheit des Zinses ist die einer Rate, einer Frequenz, siehe Würde des Lebens. Positive Geldbeträge stehen für Möglichkeiten, also Freiheiten oder auch Potenzial, während negative Geldbeträge für Notwendigkeiten, Zwänge und Einschränkungen stehen. Über das Geldsystem findet eine Wechselwirkung der Menschen miteinander statt, die man auch als Wirkung des Wirkens „monetärer Kräfte" begreifen könnte.
- Menschliche Austauschbeziehungen bilden dynamische Netzwerke aus. Die Knoten (Teilchen, Menschen) in einem über Verträge und andere Beziehungen verbundenen sozio-ökonomischen System haben eine ihrem Vermögen und Einkommen entsprechende Freiheit, neue Verträge zu knüpfen. Umgekehrt entsprechen Schulden attraktiven Kräften, die den Teilchen bestimmte Verknüpfungspartner vorgeben, sie regelrecht in diese Beziehungen hineinzwingt. Die Gesamtheit der Verträge in Kombination mit den physischen Gegebenheiten, den gewöhnlichen Aufenthaltsorten der Menschen, ihren Konsum- und

Produktionsmustern bildet ein System aus.

Diese Eigenschaften des Geldes und des übrigen Teils des immateriellen geltenden Toten in und zwischen Menschen, die am Geldsystem teilhaben, legen die Verwendung der Terminologie der Thermodynamik nahe. Das mathematische Gebäude der Thermodynamik ist zudem logisch konsistent. Überträgt man seine Aussagen auf die Sozio-Ökonomie, begründet sich die Validität dieser Vorgehensweise auf der Berechenbarkeit und Regelkonformität menschlichen Verhaltens im Umgang mit Geld. Der Schlüssel zur Übertragung ist die Zuordnung der einschlägigen Begriffe.

Leonard Susskinds Darstellung der Thermodyanmik

Prof. Leonard Susskind, der an der Stanford Universität Physik unterrichtet, leitet die Entropie wie folgt her.

Teilchen, System, Besetzungszahlen, Besetzungswahrscheinlichkeiten

Man hat N identische Teilchen, die man in ein *System* einbringt. Das System ist ein *Wechselwirkungszusammenhang*, z.B. eine elektromagnetische Falle, ein optischer oder akkustischer Resonator, ein Behälter oder ein Gewebe, ein regelmäßiges oder unregelmäßiges Gitter, das aus Atomen und ihren Bindungen untereinander besteht. Das *System* hat einzelne energetische *Zustände* i, deren Energien, wenn sie jeweils von einem Teilchen besessen werden, jeweils E_i betragen.

Die *Besetzungszahlen* n_i geben an, wieviele Teilchen sich im Zustand i befinden. Man findet für die gesamte Zahl der Teilchen N und die mittlere

Energie E folgende Erhaltungsgrößen, die Zwangsbedingungen sind:

$$N = \sum_i n_i \tag{1}$$

$$NE = \sum_i n_i E_i. \tag{2}$$

Die Wahrscheinlichkeit, eines der Teilchen im $i$ten Zustand anzutreffen, heißt *Besetzungswahrscheinlichkeit*. Die Besetzungswahrscheinlichkeiten der Zustände p_i ergeben sich zu

$$p_i = \frac{n_i}{N}$$

Die Anzahl der Möglichkeiten N identische Teilchen so zu verteilen, dass die Besetzungszahlen jeweils n_i betragen, ist die kombinatorische Variable C:

$$(n_1, n_2, n_3, \cdots) \mapsto C = \frac{N!}{n_1!n_2!n_3!\cdots} = \frac{N!}{\prod_i n_i!}$$

Man sucht nun mathematisch nach einem Satz von Besetzungszahlen, die die kombinatorische Variable maximieren unter der Bedingung, dass die Teilchenzahl N beträgt und die Gesamtenergie $U = NE$. Dazu differenziert man den Logarithmus der kombinatorische Variablen nach den Besetzungswahrscheinlichkeiten.

Entropie

In Stirling'scher Näherung für große N

$$N! \approx N^N e^{-N}$$

lautet die kombinatorische Variable C:

$$C = \frac{N!}{\prod_i n_i!} \approx \frac{N^N e^{-N}}{\prod_i n_i^{n_i} e^{-n_i}} = \frac{N^N}{\prod_i n_i^{n_i}}.$$

Der **Logarithmus der kombinatorischen Variable C** lautet:

$$\begin{aligned} \log(C) &\approx N\log(N) - \sum_i n_i \log(n_i) && (3)\\ &\approx N\log(N) - N\sum_i p_i \log(Np_i) && (4)\\ &\approx N\log(N) - N\log(N)\sum_i p_i \cdots && (5)\\ &\quad -N\sum_i p_i \log(p_i) && (6)\\ &\approx -N\sum_i p_i \log(p_i) && (7) \end{aligned}$$

Man erkennt hier, dass der teilchenspezifische Logarithmus der kombinatorischen Variablen proportional ist zur **Entropie**:

$$S(p_i) = k_B \frac{\log(C)}{N} = -k_B \sum_i p_i \log(p_i),$$

wobei k_B die Boltzmann-Konstante ist.

Maximierung der Entropie

Es wird im Folgenden ein Vektor von Besetzungswahrscheinlichkeiten gesucht, der die Entropie maximiert. Dazu wird Lagranges Methode verwandt. Die Einheit der Hauptfunktion S in der zu maximierenden Funktion F' ist die Einheit der Boltzmann-Konstante k_B. Die Verwendung der Boltzmann–Konstante als Faktor vor der Teilchen-spezifischen kombinatorischen Variable zwingt den übrigen Lagrange-Faktoren α und β ihre Einheiten auf. Da der Formalismus der Thermodynamik hier auf nicht-physikalische Systeme angewendet werden soll würde seine Verwendung die Übertragbarkeit erschweren. Daher setze ich im Folgenden die Boltzmann-Konstante auf 1 oder lasse sie einfach weg.

Die zu maximierende Funktion lautet:

$$F'(p_i) = -\sum_i p_i \log(p_i) - \alpha\left(\sum_i p_i - 1\right) - \beta\left(\sum_i p_i E_i - E\right),$$

wobei als Nebenbedingungen die Normierung der Besetzungswahrscheinlichkeiten auf 1 und die Energieerhaltung hergenommen werden:

$$\sum_i = 1 \tag{8}$$

$$\sum_i p_i E_i = E \tag{9}$$

Die Differenzierung nach den p_i ergibt:

$$\frac{\partial F'}{\partial p_i} = -\log(p_i) + 1 - \alpha - \beta E_i$$

Zustandssumme und Temperatur

Aus der Gleichsetzung der Ableitungen mit 0 folgt zunächst

$$\log(p_i) + 1 = -\alpha - \beta E_i,$$

so dass sich die Besetzungswahrscheinlichkeiten zu

$$p_i = e^{-1-\alpha} e^{-\beta E_i} \tag{10}$$
$$= \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i} \tag{11}$$

ergeben, wobei mit Hilfe der Normierung der Besetzungswahrscheinlichkeiten

$$Z(\beta) = e^{1+\alpha} = \sum_i e^{-\beta E_i}$$

die Zustandssumme ist, die sich (auch) aus der Normierung der Besetzungswahrscheinlichkeiten ergibt. Man erkennt, dass der Verlauf der p_i empfindlich vom Faktor β abhängt. Für große β sind die p_i um die Zustände mit den niedrigsten Energien besonders hoch, während für kleine β in zunehmendem Maß Zustände mit größerer Energie populiert sind.

Die Nebenbedingung für die Energie (die Energieerhaltung) und die Definition der Zustandssumme Z bieten die Möglichkeit, die mittlere Energie E als Funktion von Zustandssumme und dem Lagrange-Multiplikator β auszudrücken. Setzt man die so gefundenen Besetzungswahrscheinlichkeiten in die Energieerhaltung ein, so erhält man

$$E = \sum_i p_i E_i \tag{12}$$
$$= \frac{1}{Z} \sum_i e^{-\beta E_i} E_i \tag{13}$$
$$= \frac{\partial}{\partial \beta} \log(Z) \tag{14}$$

Die von den Lagrange-Multiplikatoren abhängige maximale Entropie S ist also:

$$
\begin{aligned}
S &= -\sum_i p_i \log(p_i) && (15)\\
&= -\sum_i \frac{1}{Z} e^{-\beta E_i} \log\left(\frac{1}{Z} e^{-\beta E_i}\right) && (16)\\
&= \frac{\log(Z)}{Z} \sum_i e^{-\beta E_i} + \frac{\beta}{Z} \sum_i E_i e^{-\beta E_i} && (17)\\
&= \log(Z) + \beta E && (18)
\end{aligned}
$$

Das totale Differenzial der maximalen Entropie lautet:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}S &= \frac{\partial}{\partial \beta} \log(Z)\, \mathrm{d}\beta + \beta\, \mathrm{d}E + E\, \mathrm{d}\beta && (19)\\
&= \beta\, \mathrm{d}E && (20)
\end{aligned}
$$

Der Lagrange-Multiplikator β wird einheitlich als der Kehrwert der Temperatur definiert:

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}E}$$

Helmholtz' Freie Energie und Druck

Neben der Temperatur, die mit der Entropie zusammen ein Paar konjugierter Variablen bildet, ist noch der Druck von Interesse, der mit dem Volumen oder der räumlichen Ausdehnung des Wirkungszusammenhangs zusammenhängt und ein Paar konjugierter Variablen bildet. Der Druck ist zusammen mit der Oberfläche, dem Rand des Volumens, ein Maß für die Spannungen und Kräfte, die zwischen Umwelt und System herrschen.

Die Gleichgewichtsentropie kann nun in eine andere Form gebracht werden:

$$E - TS = -T\log(Z) = F$$

mit der freien Energie F.

Druckverlauf auf Isentropen

Für die Bestimmung der Volumenabhängigkeit des Drucks bei konstanter Entropie können die bisher gefundenen Gleichungen nicht ohne Weiteres dienen. Stattdessen muss man sie umformen. Die gesuchte Ableitung ist

$$P = -\left.\frac{\partial E}{\partial V}\right|_T .$$

Um diese Ableitung errechnen zu können wird das totale Differenzial der Energie als Funktion des Volumens und der Temperatur betrachtet:

$$\mathrm{d}E = \left.\frac{\partial E}{\partial V}\right|_T \mathrm{d}V + \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_V \mathrm{d}T \tag{21}$$

$$= \left.\frac{\partial E}{\partial V}\right|_T \mathrm{d}V + \left.\frac{\partial E}{\partial S}\right|_V \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_V \mathrm{d}T \tag{22}$$

Nun nutzt man aus, dass man sich auf Isentropen bewegt, also auf Kurven

$$(V,T) \mapsto S = \text{const.},$$

denn auf Isentropen ist das Differenzial der Entropie definitionsgemäß 0:

$$\mathrm{d}S = \left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_T \mathrm{d}V + \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_V \mathrm{d}T = 0.$$

Es folgt für die Veränderung der Temperatur als Folge infinitesimaler Veränderungen des Volumens auf Isentropen:

$$\mathrm{d}T = -\frac{\left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_T}{\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_V}\,\mathrm{d}V.$$

Setzt man dieses Ergebnis in das Energiedifferenzial ein, so erhält man:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}E &= \left.\frac{\partial E}{\partial V}\right|_T \mathrm{d}V - \left.\frac{\partial E}{\partial S}\right|_V \left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_V \frac{\left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_T}{\left.\frac{\partial S}{\partial T}\right|_V}\,\mathrm{d}V \quad (23)\\ &= \left.\frac{\partial E}{\partial V}\right|_T \mathrm{d}V - \left.\frac{\partial E}{\partial S}\right|_V \left.\frac{\partial S}{\partial V}\right|_T \mathrm{d}V \quad (24) \end{aligned}$$

Eingesetzt in die Definition des Drucks ergibt sich:

$$\begin{aligned} P &= \frac{\partial}{\partial V}(TS-E)_T \quad (25)\\ &= -\left.\frac{\partial F}{\partial V}\right|_T \quad (26)\\ &= T\left.\frac{\partial \log(Z)}{\partial V}\right|_T. \quad (27) \end{aligned}$$

Fluktuationen

Es werden nun Fluktuationen der Energie berechnet:

$$
\begin{aligned}
(\Delta E)^2 &= \langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2 && (28)\\
&= \frac{1}{Z}\sum_i e^{-\beta E_i}E_i^2 - \left(\frac{1}{Z}\sum_i e^{-\beta E_i}E_i\right)^2 && (29)\\
&= \frac{1}{Z}\frac{\partial^2 Z}{\partial \beta^2} - \frac{1}{Z^2}\left(\frac{\partial Z}{\partial \beta}\right)^2 && (30)\\
&= \frac{\partial^2}{\partial \beta^2}\log(Z) && (31)\\
&= \frac{\partial}{\partial \beta}\frac{1}{Z}\frac{\partial Z}{\partial \beta} && (32)\\
&= -\frac{\partial}{\partial \beta}E && (33)\\
&= T^2\left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_V && (34)\\
&= T^2 C_V, && (35)
\end{aligned}
$$

wobei benutzt wurde, dass

$$\frac{\partial}{\partial \beta} = -\frac{1}{T^2}\frac{\partial}{\partial T}$$

sowie

$$C_V = \left.\frac{\partial E}{\partial T}\right|_V .$$

Die Größe C_V heißt spezifische Wärmekapazität.

Index