Erhaltungs- und Zerfallssätze für Güter; Gütermengenfelder und Ströme; Verteilungsfunktion und Impulsdichte diskreter Güter; Die Kontinuitätsgleichung und Erhaltungssätze von Gütermengen; Transportgleichung für reale Güter mit ortsabhängiger Zerfallskonstante und Quellterm; Ein Zerfallsgesetz; Güter-Transportgleichung

(HTML Version)

ein Ausschnitt aus dem Buch

Das Zinsvorzeichen

Eine konzentrierter Geisteserguss gegen das kluge Böse.

von Tim Deutschmann (Physiker)

www.tim-deutschmann.de

(E-Mail)

Inhaltsverzeichnis

Erhaltungs- und Zerfallssätze für Güter

Ein fundamentales Prinzip der Physik ist das Konzept der Massen- und Energieerhaltung das besagt, dass in einem System über dessen Grenzen hinweg es keinen Energie- bzw. Massentransport gibt, die Energiemenge bzw. die Masse erhalten bleibt. Die Verteilung der Energie/Masse lässt sich mathematisch am einfachsten durch eine Dichte beschrieben. Die Einheit dieser Dichte ist Masse/Energie pro Volumen.

Gütermengenfelder und Ströme

Die gesamte Gütermenge eines Raumbereichs findet sich durch Integration über die dem Gut zugeordnete Dichte:

$$N_G = \int_V \rho_G(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}^3 x$$

Die Impulsdichte $\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})$ eines Strömungsfeldes ist definiert als das Produkt aus Dichte $\rho(\boldsymbol{x})$ und Strömungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})\rho(\boldsymbol{x})$$

Diese Definition ist analog zur Definition des Impulses in der klassischen Mechanik.

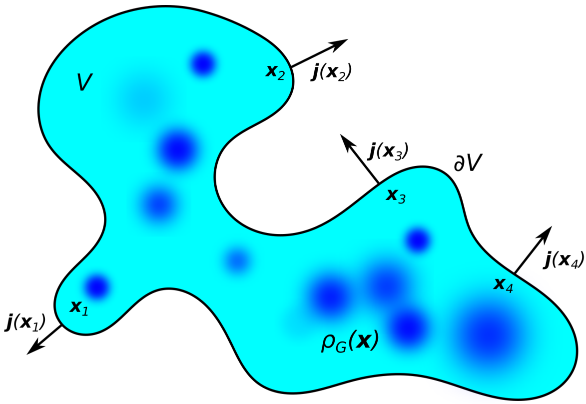

Abbildung 1: Volumen V mit Rand ∂V, Dichte $\rho_G(\boldsymbol{x})$, Flüssen $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ und Randpunkten $\boldsymbol{x}_i$.

Verteilungsfunktion und Impulsdichte diskreter Güter

Die obige Formulierung des Fließverhaltens von Strömungen ist eine kontinuierliche Beschreibung des Mediums. Demgegenüber lassen sich reale Güter besser durch eine diskrete Verteilung beschreiben. Mit Hilfe der Benutzung von Distributionen wie der berühmten Dirac'schen Deltafunktion (-distribution) lassen sich jedoch diskrete Verteilungen „kontinuierlich“ darstellen.

Mit Hilfe der Delta-Distribution ist die Dichte einer Verteilung von diskreten Gütern folgendermaßen definiert:

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{N} \delta(\boldsymbol{x}_n) N_n$$

wobei N_n die Menge des n-ten Guts ist und $\boldsymbol{x}_n$ sein Ort. Die Geschwindigkeit des Guts sei $\boldsymbol{u}_n$, dann ist die Impulsdichte

$$\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{u}_n \delta(\boldsymbol{x}_n) N_n.$$

Die Mengen und Geschwindigkeiten der einzelnen Güter, die Raumpunkten (der jeweilige Ort des Guts) zugeordnet sind, erscheinen bei der Integration über die Verteilungsfunktion als Summanden im Integral.

Die Kontinuitätsgleichung und Erhaltungssätze von Gütermengen

Nimmt man nun an, dass die Grenzen des Raumgebiets feststehen, dann lässt sich eine zeitliche Änderung der im Volumen $\boldsymbol{x}$ befindlichen

Gütermenge wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{x}) &= -\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x}) && (1)\\
\frac{\partial}{\partial t}N_G &= \int_V \frac{\partial}{\partial t}\rho_G(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}^3x && (2)\\
&= -\int_V \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}^3x && (3)\\
&= -\int_{\partial V} \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} && (4)
\end{aligned}$$

wobei für die erste Umformung die sogenannte Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{j}(\boldsymbol{x})$$

bzw.

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\rho(\boldsymbol{x}) = -\rho\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$$

verwendet wurde, welche besagt, dass die zeitliche Dichteänderung an einem Raumpunkt so groß ist, wie die negative Divergenz des Flusses. Die zweite Umformung folgt aus dem Gauß'schen Integralsatz. $\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ ist ein differentielles orientiertes Oberflächenelement.

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt, dass die Änderung einer Gütermenge in einem abgeschlossenen Volumen (Gebiet, räumlichen Bereich) durch einen Strom über die Grenzen des Volumens erfolgt. Dies bedeutet weiter, dass die Quellen und Senken der Güter auf dem Rand des betrachteten Volumens liegen.

Transportgleichung für reale Güter mit ortsabhängiger Zerfallskonstante und Quellterm

Wenn ein Stoff in der Natur zerfällt, dann wird er i.A. in andere Stoffe transformiert, die ursprünglich vorhanden Gütermenge verschwindet jedenfalls aus dem ihr zugeordneten Raumbereich, dem Volumen der Gütermenge und tritt über die Systemgrenze (der Rand des Volumens) aus dem System aus. In diesem Abschnitt wird bekanntes Wissen der Physik von Zerfallsprozessen auf das Gebiet der Ökonomie übertragen.

Das Edeltmetall zeichnet sich durch eine besondere Korrosionsbeständigkeit aus und eignet sich daher als Tauschmittel mit gleichbleibendem Wert. Metalle wie Eisen, Kupfer und selbst Silber korrodieren unter normalen Umwelteinfüssen und weisen daher einen natürlichen Wertverlust auf. Dieser Zerfall von Gütern wird in der Ökonomie als negativer Zins bezeichnet. Gold hat dementsprechend einen Zins von 0%.

Ein Zerfallsgesetz

In der Physik werden in Bezug auf Zerfallsprozesse (z.B. der radioaktive Zerfall) Gleichungen aufgestellt, die auch in der Ökonomie Verwendung finden. Die Änderung der Menge eines Gutes kann in machen Fällen durch folgende Gleichung beschrieben werden:

$$\mathrm{d}N = -\lambda N \,\mathrm{d}t.$$

Die Änderung der Gütermenge ist also proportional zur vorhandenen Menge und der betrachteten Zeitdauer, analog zu einer negativ verzinsten Geldmenge. Die Proportionalitätskonstante heißt λ. Die Lösung dieser Gleichung findet sich unter Anwendung der Methode der Trennung der Variablen. Sie lautet:

$$N(t) = N_0 \exp(-\lambda t)$$

wobei N_0 die anfänglich vorhanden Gütermenge ist.

Die Zerfallskonstante λ des exponentiellen Zerfalls ist der negative Zins.

Außer bei radioaktiven Zerfallsprozessen in der Natur, wird der zerfallende Anteil eines Stoffs für gewöhnlich chemisch in eine andere Form transformiert. Viele Stoffe wie z.B. Metalle reagieren mit dem Sauerstoff der Luft und oxidieren, reagieren auf die Strahlung der Sonne mit Degradierung („Ausbleichen“) oder werden durch die Wechselwirkung mit Wasser im Temperaturbereuch um 0°C mechanisch zerlegt. Lebensmittel verderben, weil Kleinstlebewesen sich davon ernähren. Das Gut jedoch auch einfach räumlich vom Ort des Gutes wegtransportiert werden. Die physikalische Bezeichnung solcher Prozesse lauten Diffusion bei Transport auf molekularer Skala und Advektion auf einer supermolekularen Skala.

Güter-Transportgleichung

Ist die gesamte Gütermenge aufgrund von Zerfallsprozessen nicht erhalten, so muss die Zustandsgleichung um den Zerfallsprozess und den Quellterm erweitert werden. Die Zustandsgleichung eines Guts, welches exponentiell zerfällt und einen Quellterm (lokale Quellen- und Senkendichte und Dispersion) hat lautet:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_G(\boldsymbol{x},t) = -\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) - \boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{x},t)\rho_G(\boldsymbol{x},t) + \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x},t),$$

wobei die linke Seite mit dem ersten Term der rechten Seite die Kontinuitätsgleichung darstellt und der zweite Term der rechten Seite den Zerfallsprozess enthält.

Der Güterstrom wird als inkompressibel angenommen, also

$$\nabla(\rho_G(\boldsymbol{x},t)\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)) = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)\nabla\rho_G(\boldsymbol{x},t)$$

wegen der Inkompressibilität:

$$\nabla\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) = 0.$$

Dieser Zerfallsprozess ist die natürliche Degradierung (Verderb) und der Konsum.

Der letzte Term auf der rechten Seite J ist ein Quellterm, der sich aus einem lokalen Quellterm (lokale Produktion) und einem Dispersionsterm

$$J(\boldsymbol{x},t) = J_{\text{lokal}}(\boldsymbol{x},t) + J_{\text{Handel}}(\boldsymbol{x},t)$$

zusammensetzt, der den Zustrom von Gütern über andere Transportwege beschreibt. Die lokale Quelldichte $J_{\text{lokal}}(\boldsymbol{x},t)$ ist die Summe der Quellendichte und der Senkendichte (die $+$ und $-$ Zeichen in der rechts stehenden Grafik):

$$J_{\text{lokal}}(\boldsymbol{x},t) = J_{+}(\boldsymbol{x},t) + J_{-}(\boldsymbol{x},t)$$

Die Quelldichte $J_{\text{Handel}}(\boldsymbol{x},t)$ ist die Dichte der Märkte (das **M** in der Grafik rechts) und ist analog zum Phänomen der Dispersion in der Physik von Streuvorgängen.

Der Dispersionsterm hat also die Form

$$J_{\text{Handel}}(\boldsymbol{x},t) = \int_{\partial V_M} [\rho_G \boldsymbol{u} \rho_0 \varphi_{\text{Kauf}}](\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}s$$

wobei

$$[\rho_G \boldsymbol{u} \rho_0 \phi_{\text{Kauf}}](\boldsymbol{x},t) = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{x},t)\rho_0(\boldsymbol{x},t)\phi_{\text{Kauf}}(\boldsymbol{x},t)$$

ist, ρ_0 die „Gelddichte“ auf dem Markt und ϕ_{Kauf} eine „Kauftendenz/neigung“ quantifiziert. Die Zerfallskonstanten λ ergeben sich aus dem Verderb des Gutes entlang der Transportwege und zeit- und ortsunabhängig oder auch zeitabhängig sein.

ρ_G	ρ_0	$\boldsymbol{u}$	$\boldsymbol{J}$	ϕ_{Kauf}	$J_{\text{lokal, Handel},+,-}$
Güter-Dichte	Geld-Dichte	Geschwin-digkeit	Strom-Dichte	Kauf-Tendenz	Quell-Dichte
$\frac{G}{L^3}$	$\frac{e,\$,¥}{L^3}$	$\frac{L}{T}$	$\frac{G}{L^2T}$	$\frac{1}{e,\$,¥}$	$\frac{g}{L^3T}$

Abbildung 2: **Oben:** *Verwendetes mathematisches Symbol,* **mitte:** *Bezeichnung im Text und* **unten** *ökonomische Einheit.*

Index