Hamiltons Prinzip der kleinsten Wirkung

(HTML Version)

ein Ausschnitt aus dem Buch

Das Zinsvorzeichen

Eine konzentrierter Geisteserguss gegen das kluge Böse.

von Tim Deutschmann (Physiker)

www.tim-deutschmann.de

(E-Mail)

Inhaltsverzeichnis

Hamiltons Prinzip der kleinsten Wirkung

Zu den Grundpfeilern der theoretischen Physik gehört William Rowan Hamiltons Prinzip der kleinsten Wirkung. Es ergibt sich aus der Anwendung der Variationsrechnung, die von Leonhard Euler und Joseph-Louis Lagrange entwickelt wurde. Um die Aussage des Hamiltonischen Prinzips zu verstehen, braucht es eine kleine Skizze.

Wir interessieren uns nun für alle mögliche Trajektorien $q(t)$ zwischen (q_1,t_1) und (q_2,t_2). An jeder Position entlang der Trajektorie ist eine Zeitableitung definiert, und es kann der Position der Wert einer Funktion F zugewiesen werden, die die Position q und die Geschwindigkeit $\dot{q}$. des Massenpunktes sowie den Zeitpunkt t zum Argument hat:

$$(q,t) \to F(q,\dot{q},t)$$

Gesucht ist nun eine Funktion F derart, dass das folgende Zeitintegral über die Trajektorie im Raum aller Trajektorien

$$S[q] = \int_{t_1}^{t_2} F(q,\dot{q},t)\,\mathrm{d}t$$

für die physikalische, natürliche Trajektorie $q_{\text{phys}}(t)$ ein Extremum annimmt,

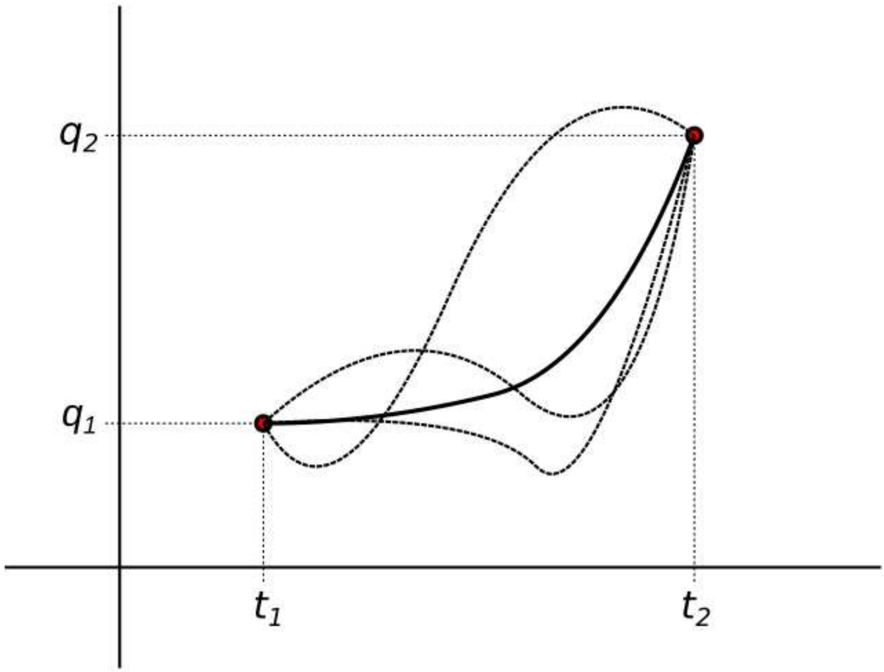

Abbildung 1: Mögliche Trajektorien des Systems zwischen den (in rot markierten) Punkten (q_1,t_1) und (q_2,t_2). Die Trajektorie mit minimaler Wirkung ist mit durchgezogener Linie gekennzeichnet, alle anderen (gestrichelt gekennzeichneten) Trajektorien sind unphysikalisch (unnatürlich).

dass also

$$\delta S[q_{\mathsf{phys}}] = 0.$$

Auf der Suche nach dieser Funktion sollte man zunächst anschauen, welche Bedingungen sich ihr infolge der Forderung der Extremalität der physikalischen Trajektorie stellen. Dazu berechnet man die Variation des Zeitintegrals im Raum der Trajektorien um die physikalische Trajektorie:

$$\delta S[q] = S[q+\varepsilon] - S[q].$$

Den um eine kleine Verrückung ε gestörten Teil der rechten Seite kann man in erster Ordnung der Taylor-Reihe bei q annähern:

$$S[q+\varepsilon] \approx \int_{t_1}^{t_2} \left(F(q,\dot{q},t) + \frac{\partial F}{\partial q}\varepsilon + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\dot{\varepsilon} \right) \mathrm{d}t$$

Die Variation des Wirkungsfunktionals ergibt sich durch Vergleich der letzten Gleichung mit seiner Definition also zu

$$\delta S \approx \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial q}\varepsilon + \frac{\partial F}{\partial \dot{q}}\dot{\varepsilon} \right) \mathrm{d}t$$

Wir sind an der Extremalbedingung an die Funktion F interessiert, weswegen wir die Verrückung möglichst los werden wollen. Alle Verrückungen haben jedoch die Eigenschaft, dass sie an den Endpunkten der Trajektorien verschwinden, weil wie ja nur an Trajektorien interessiert waren, die zwischen (q_1,t_1) und (q_2,t_2) verlaufen. Es gilt daher:

$$\varepsilon(t_1) = 0 \quad (1)$$

$$\varepsilon(t_2) = 0. \quad (2)$$

Diese Eigenschaft der Verrückungen kann man ausnutzen, wenn man sich an die Produktregel für das Differenzieren erinnert:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg) = g\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f + f\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g$$

also

$$f\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}g = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(fg) - g\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f.$$

Damit ist es möglich, im zweiten Summand der Variation des Wirkungsfunktionals die Zeitableitung des zweiten Faktors, die Zeitableitung der Verrückung, auf den ganzen Summanden umzuwälzen:

$$\begin{aligned}
\delta S &\approx \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \varepsilon + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \varepsilon \right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \varepsilon \right) \mathrm{d}t && (3) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial q} \varepsilon - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \varepsilon \right) \mathrm{d}t + \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \varepsilon \right) \mathrm{d}t && (4) \\
&= \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) \varepsilon \, \mathrm{d}t + \left[\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \varepsilon \right]_{t_1}^{t_2} && (5)
\end{aligned}$$

Der zweite Summand verschwindet infolge der Eigenschaft der Verrückungen an den Anfangs- und Endpunkten der Trajektorien zu verschwinden:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \varepsilon \right]_{t_1}^{t_2} = 0$$

Die Extremalbedingung des Verschwindens der Variation des Wirkungsfunktionals erfordert nun auf der physikalischen Trajektorie:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \frac{\partial F}{\partial \dot{q}} \right) \Bigg|_{q_{\mathrm{phys}}} = 0$$

Index