Multiplikation und Faktorzerlegung von Matrizen; Bekannte Faktorzerlegungen von Matrizen; Einige Eigenschaften der Hauptachsentransformation; Rechtfertigung der Eigenvektorzerlegung; Eliminiationsverfahren in der alternativen Darstellung der Matrixmultiplikation; Zum Fundamentaltheorem der linearen Algebra

(HTML Version)

ein Ausschnitt aus dem Buch

Das Zinsvorzeichen

Eine konzentrierter Geisteserguss gegen das kluge Böse.

von Tim Deutschmann (Physiker)

www.tim-deutschmann.de

(E-Mail)

Inhaltsverzeichnis

Seite

Multiplikation und Faktorzerlegung von Matrizen

Bekannte Faktorzerlegungen von Matrizen

- $A = LU$: LU-Zerlegung in Eliminationsverfahren, L ist untere, U eine obere Dreiecksmatrix.
- $A = QR$: QR-Zerlegung in der Methode der kleinsten Quadrate, Gram-Schmidtsches Orthogonalisierungsverfahren.
- $S = Q\Lambda Q^T$: Hauptachsentransformation. S ist eine symmetrische Matrix, Q eine Matrix mit orthonormalen Spalten, die typischerweise Eigenvektoren sind.

- $A = X\Lambda X^{-1}$.
- $A = U\Sigma V^T$: Singulärwertzerlegung (SVD), U und V sind orthogonale Matrizen.

Λ und Σ sind Diagonalmatrizen.

Einige Eigenschaften der Hauptachsentransformation

In der Hauptachsentransformation

$$S = Q\Lambda Q^T = (q_1 \cdots q_n) \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{pmatrix}$$

sind λ_i die *Eigenwerte* und q_i die *Eigenvektoren*, siehe Eigenwertproblem.

Die Eigenwerte symmetrischer Matrizen S sind reell.

Rechtfertigung der Eigenvektorzerlegung

Durch geschickte Klammerung lassen sich einige Eigenschaften der Ergebnismatrix erkennen:

$$(Q\Lambda)(Q^T),$$

die ja in der vektorweisen Multiplikation als eine Summe von Matrizen mit Rang 1 darstellbar ist (siehe Vorlesung 1), bei der jeweils eine Spalte aus $Q\Lambda$ mit einer Zeile aus Q^T multipliziert wird, so dass

$$S = \lambda_1 q_1 q_1^T + \cdots \lambda_n q_n q_n^T.$$

Diese Darstellung schlägt eine Brücke in die Spektraltheorie. In dieser Zerlegung von S ergibt sich für das Produkt Sq_k:

$$\begin{aligned} Sq_k &= (\lambda_1 q_1 q_1^T + \cdots \lambda_n q_n q_n^T) q_k && (1) \\ &= \lambda_k q_k q_k^T q_k && (2) \\ &= \lambda_k q_k, && (3) \end{aligned}$$

da alle Eigenvektoren q_i orthonormal sind und daher

$$q_i q_j = \delta_{ij}$$

sowie

$$q_k^T q_k = \|q_k\| = 1.$$

Eliminiationsverfahren in der alternativen Darstellung der Matrixmultiplikation

Als einfaches Beispiel betrachte man eine zu diagonalisierende 2x2 Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = U$$

Die Frage ist nun, wie man den Rechenschritt in der „Matrixsprache" ausdrückt. Die den Rechenschritt repräsentierende Matrix ist

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix},$$

so dass

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = LU$$

Wie kann man diese Zerlegung in der alternativen Formulierung der Matrixmultiplikation darstellen?

Dazu zerlegt man sich die Matrix A wie folgt in die Summe zweier Matrizen vom Rang 1:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$= \begin{pmatrix} l_{11} \\ l_{21} \end{pmatrix} (u_{11}\, u_{12}) + \begin{pmatrix} l_{12} \\ l_{22} \end{pmatrix} (u_{21}\, u_{22}) \tag{5}$$

Dabei hat man „im Hinterkopf", dass im ersten Schritt des Gauß'schen Eliminationsverfahrens die erste Zeile verwendet wird, um in der ersten Spalte aller anderen Zeilen durch Subtraktion eine 0 zu produzieren:

$$\begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & & & \\ * & & A_2 & \\ * & & & \end{pmatrix}.$$

Allgemeiner formuliert zerlegt man A so, dass eine Summe aus dem jeweiligen Produkt von Rang-1-Matrizen entsteht:

$$A = \begin{pmatrix} l_{11} \\ \vdots \\ l_{n1} \end{pmatrix} (u_{11} \cdots u_{1n}) + \begin{pmatrix} l_{12} \\ \vdots \\ l_{n2} \end{pmatrix} (u_{21} \cdots u_{2n}) + \cdots \begin{pmatrix} l_{1n} \\ \vdots \\ l_{nn} \end{pmatrix} (u_{n1} \cdots u_{nn}).$$

Das Ergebnis jeder Diagonalisierung ist letztlich eine LU Zerlegung.

Zum Fundamentaltheorem der linearen Algebra

Es gibt für $x \in \mathbb{R}^n$ 4 bedeutsame fundamentale Unterräume einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

1. Der Spaltenraum einer Matrix Col$(A) \subset \mathbb{R}^m$ mit der Dimension r.
2. Der Zeilenraum einer Matrix Col$(A^T) \subset \mathbb{R}^n$ mit der gleichen Dimension r.
3. Der Nullraum von A Kern$(A) \subset \mathbb{R}^n$ mit der Dimension $n-r$.
4. Der Nullraum der transponierten Matrix Kern$(A^T) \subset \mathbb{R}^m$ mit der Dimension $m-r$.

Der Nullraum, auch Kern von A, Kern(A) *ist die Menge aller Vektoren, deren Bild der Nullvektor ist:*

$$\text{Kern}(A) = \{x | Ax = 0\}.$$

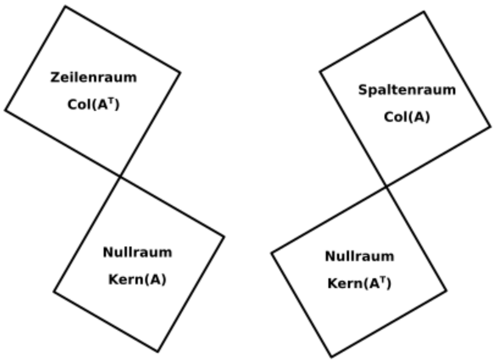

Abbildung 1: Die 4 Unterräume des Fundamentaltheorems der linearen Algebra.

Jeder Bildvektor $Ax = y \in \mathbb{R}^m$ hat jeweils einen Anteil im Spaltenraum Col(A) und den anderen im Nullraum der transponierten Matrix Kern(A^T) und jeder Vektor $x \in \mathbb{R}^n$ hat jeweils einen Anteil im Zeilenraum Col(A^T) und den anderen im Nullraum Kern(A) hat.

Beispiel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$$

$m = 2$, $n = 3$ und $r = 1$. Gesucht sind zwei Vektoren des Nullraums, z.B.

$$\mathrm{Kern}(A) = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Zur relativen Lage der jeweiligen Unterräume ist Folgendes zu sagen. Man erkennt an der Konstruktion des Beispiels, dass gelten muss:

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Für alle $y \in \mathrm{Col}(A^T)$ und $x \in \mathrm{Kern}(A)$ muss gelten

$$y^T x = 0,$$

denn die Bedingung des Nullraums impliziert, dass dessen Elemente orthogonal zu den Zeilen der Matrix A sind. Deswegen sind $\mathrm{Col}(A^T)$ und $\mathrm{Kern}(A)$ orthogonal.

Index