Orthonormale Spalten in Q ergeben Q'Q=I; Orthonormalität und Orthogonalität der Matrizen Q; Beispiele für symmetrische und orthogonale Matrizen; 3D Rotationsmatrix; 2D Reflektionsmatrix; Householder Reflektionen; Hadamard-Matrizen; Wavelet-Matrizen; Eigenwerte von symmetrischen und orthogonalen Matrizen

(HTML Version)

ein Ausschnitt aus dem Buch

Das Zinsvorzeichen

Eine konzentrierter Geisteserguss gegen das kluge Böse.

von Tim Deutschmann (Physiker)

www.tim-deutschmann.de

(E-Mail)

Inhaltsverzeichnis

Orthonormale Spalten in Q ergeben Q'Q=I

Orthonormalität und Orthogonalität der Matrizen Q

Werden die Eigenvektoren auf 1 normiert, erhält man mit ihrer Zusammenstellung in Spalten eine orthonormale Matrix:

$$Q = \begin{pmatrix} \\ q_1 & \cdots & q_n \\ \\ \end{pmatrix},$$

so dass

$$Q^T Q = I,$$

wobei $I \in R^{n \times n}$ die Einheitsmatrix ist. Dies ist leicht einzusehen:

$$Q^T Q = \begin{pmatrix} q_1^T \\ \vdots \\ q_n^T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \\ q_1 & \cdots & q_n \\ \\ \end{pmatrix},$$

da

$$q_i^T q_j = \delta_{ij}.$$

Gilt auch $QQ^T = I$? Die Antwort lautet: ja, wenn Q quadratisch ist.

Wenn die Eigenvektormatrix einer Abbildung A quadratisch ist, dann heißt sie orthogonal.

Beispiele für symmetrische und orthogonale Matrizen

3D Rotationsmatrix

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

Es gilt:

$$Q^T = Q^{-1},$$

dass also die Inverse von Q gleich der Transponierten von Q ist.

Q ist eine Rotationsmatrix:

$$\begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & -\sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & \cos(\vartheta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) \end{pmatrix},$$

die die Länge des transformierten Vektors x erhält:

$$\forall x \quad \|Qx\| = \|x\|$$

Dies ist wie folgt zu zeigen:

$$\begin{aligned} \|Qx\|^2 &= (Qx)^T(Qx) && (1) \\ &= x^T Q^T Qx && (2) \\ &= \|x\|^2 && (3) \end{aligned}$$

2D Reflektionsmatrix

Die folgende Matrix

$$Q = \begin{pmatrix} \cos(\vartheta) & \sin(\vartheta) \\ \sin(\vartheta) & -\cos(\vartheta) \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch und hat die Determinante -1. Die Abbildung spiegelt alle Vektoren an der Geraden

$$x_2 = x_1 \tan\left(\frac{\theta}{2}\right).$$

Householder Reflektionen

Man beginnt mit einem Einheitsvektor u mit

$$u^T u = 1.$$

Alston Scott Householder fand die Householder-Transformationen H:

$$H = I - 2uu^T$$

H ist orthogonal

$$H^T = \left(I - 2uu^T\right)^T = I - 2uu^T$$

und symmetrisch:

$$\begin{aligned} H^T H &= \left(I-2uu^T\right)^T \left(I-2uu^T\right) && (4) \\ &= \left(I-2uu^T\right)\left(I-2uu^T\right) && (5) \\ &= I - 4uu^T + 4uu^T uu^T && (6) \\ &= I. && (7) \end{aligned}$$

Hadamard-Matrizen

Jacques Hadamard fand die Hadamard-Matrizen.

$$H_1 = 1$$

$$H_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Damit konstruiert man:

$$H_4 = \begin{pmatrix} H_2 & H_2 \\ H_2 & -H_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

und allgemein:

$$H_{2n} = \begin{pmatrix} H_n & H_n \\ H_n & -H_n \end{pmatrix}.$$

Man erkennt die Orthogonalität unmittelbar am Konstruktionsprinzip: Die Zeilen der Matrix sind orthogonal.

Gibt es H_{12}? Ja. Es ist möglich, aus einfacheren $m \times n$-Matrizen größere Hadamard-Matrizen zu erzeugen.

Wavelet-Matrizen

Im Zusammenhang mit Wavelets gibt es die Wavelet-Transformationen, die um 1910 von Alfréd Haar gefunden wurden. 1988 wurden von Ingrid Daubechies ganze Familien von Wavelets gefunden.

$$W_4 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

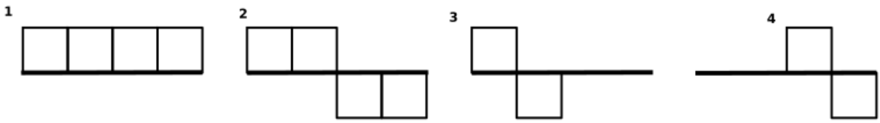

Abbildung 1: Haar-Wavelets.

$$W_8 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{\sqrt{2}}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$

Eigenwerte von symmetrischen und orthogonalen Matrizen

Symmetrische Matrizen S erfüllen die Bedingung

$$S^T = S.$$

Ihre Eigenvektormatrizen sind orthogonal:

$$Q^T Q = I.$$

Beispiel:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Was ist die Eigenvektormatrix F_4 von Q? Q ist eine Permutationmatrix. Ein Eigenvektor muss also ein Vektor sein, dessen Komponenten alle gleich sind, der Fouriervektor mit der Frequent 0 in der ersten Spalte von F_4.

$$F_4 = \begin{pmatrix} i^0 & i^0 & i^0 & i^0 \\ i^0 & i^1 & i^2 & i^3 \\ i^0 & i^2 & i^4 & i^6 \\ i^0 & i^3 & i^6 & i^9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix}$$

Um die Orthogonalität der Spalten von F_4 zu testen, muss beim Skalarprodukt das Konjugieren berücksichtigt werden:

$$\begin{aligned} Q^T Q &= I && (8) \\ Qx &= \lambda x && (9) \\ Qy &= \mu y && (10) \\ &\Rightarrow \bar{x}^T y = 0 && (11) \end{aligned}$$

Index