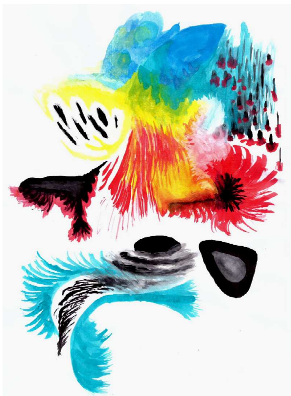
Eigenwerte und Eigenvektoren; Positiv definite und symmetrische Matrizen; Eigenwerte ähnlicher Matrizen; Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer und antisymmetrischer Matrizen; Symmetrische und positiv definite Marizen; Schlussfolgerungen; Spektraltheorem

(HTML Version)

ein Ausschnitt aus dem Buch

Das Zinsvorzeichen



Eine konzentrierter Geisteserguss gegen das kluge Böse.

von Tim Deutschmann (Physiker)

www.tim-deutschmann.de

(E-Mail)

Inhaltsverzeichnis

Eigenwerte und Eigenvektoren

Positiv definite und symmetrische Matrizen

Wenn man $y = Ax$ berechnet, wobei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dann erhält man für manche x Vektoren y, die kolinear zu x sind:

$$Ax_i = \lambda_i x_i \quad i = 1, \ldots, n,$$

nämlich die Eigenvektoren. Um eine der Bedeutungen von Eigenvektoren zu erkennen, betrachtet man, wie A^2 die Eigenvektoren von A abbildet

$$A^2 x = A\lambda x = \lambda^2 x,$$

dann erhält man allgemein:

$$A^n x = \lambda^n x,$$

inclusive

$$A^{-1} x = \frac{1}{\lambda} x.$$

Mit wenig Aufwand kann man nun auch zeigen, dass gilt:

$$e^{At} x = e^{\lambda t} x.$$

Mit n unabhängigen Eigenvektoren hat man eine Basis mit der man jeden beliebigen Vektor v des Bildes konstruieren kann

$$v = c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n.$$

In dieser Darstellung des Vektors kann man sich nun fragen, wie sich v unter der Abbildung A^k transformiert:

$$\begin{aligned} A^k v &= c_1 A^k x_1 + \cdots + c_n A^k x_n && (1) \\ &= c_1 \lambda_1^k x_1 + \cdots + c_n \lambda_n^k x_n. && (2) \end{aligned}$$

Als Anwendung bieten sich Differenzgleichungen

$$v_{k+1} = A v_k$$

oder lineare Differenzialgleichungen der Form:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = Av,$$

deren Lösung dann

$$v(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n t} x_n$$

sind.

Eigenwerte ähnlicher Matrizen

B ähnlich ist zu A, wenn

$$B = M^{-1}AM$$

und M eine invertierbare Matrix ist. In diesem Fall haben A und B die gleichen Eigenwerte.

Zum Beweis dieses Satzes formt man zunächst die Ähnlichkeitsbedingung ein wenig um, um einen Hinweis zu erhalten, worauf es ankommt, denn als Voraussetzung hat man, dass $Ax = \lambda x$. Es ist nur bekannt, wie A auf einen Eigenvektor wirkt, während man über B nur weiß, dass sie ähnlich zu A ist:

$$\begin{aligned} B &= M^{-1}AM && (3) \\ BM^{-1} &= M^{-1}A. && (4) \end{aligned}$$

Nun schaut man, wie die beiden Seiten auf einen Eigenvektor von A einwirken:

$$BM^{-1}x = M^{-1}Ax = \lambda M^{-1}x.$$

Nun erkennt man, dass $y = M^{-1}x$ ein Eigenvektor von B mit dem Eigenwert λ ist:

$$\begin{aligned} By &= M^{-1}AMM^{-1}x && (5) \\ &= M^{-1}Ax && (6) \\ &= \lambda M^{-1}x && (7) \\ &= \lambda y. && (8) \end{aligned}$$

Mit dem Ähnlichkeitsargument kann man zeigen, dass AB die gleichen Eigenwerte wie BA hat:

$$M(AB)M^{-1} = BA$$

Man erkennt die Behauptung, wenn man $M = B$ setzt.

Eigenwerte und Eigenvektoren symmetrischer und antisymmetrischer Matrizen

Sei S eine symmetrische Matrix. Welche Eigenschaften haben ihre Eigenwerte und Eigenvektoren?

Die Eigenwerte symmetrischer Matrizen sind reell.

Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Wenn man A transponiert, dann erhält man die negative Matrix:

$$A^T = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -A.$$

Daher ist die Matrix antisymmetrisch.

Die Eigenwerte antisymmetrischer Matrizen sind imaginär.

A entspricht einer Drehung um 90°. Wie man sich leicht vorstellen kann, hat A zunächst einmal keinen vom Nullvektor verschiedenen Eigenvektor, weil

$$Ax \perp x \Leftrightarrow (Ax)^T x = x^T A^T x = 0.$$

Man vollzieht die normale Prozedur zum Auffinden von Eigenwerten und Eigenvektoren:

$$\begin{aligned} Ax &= \lambda x && (9) \\ (A - \lambda I)x &= 0 && (10) \\ \det(A - \lambda I) &= 0, && (11) \end{aligned}$$

wobei $\det(A)$ die Determinante von A berechnet.

$$\det(A-\lambda I) = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 + 1 = 0$$

Daraus folgt:

$$\lambda \pm i.$$

Addiert man die Eigenwerte erhält man die Spur $\text{tr}(A)$ der Matrix A. Multipliziert man die Eigenwerte, dann berechnet man die Determinante der Eigenvektormatrix. A hat folgemde Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= 0 \qquad (12) \\ \det(A) &= 1 \qquad (13) \end{aligned}$$

Symmetrische und positiv definite Marizen

Die Eigenwerte sind reell und die Eigenvektoren orthogonal. Sei z.B.

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von S sind ± 1, $\text{tr}(S) = 0$, $\det(S) = -1$. Die Eigenvektoren sind

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sei

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Die Matrizen S und Λ sind ähnlich, d.h., dass es ein M gibt mit

$$M^{-1}SM = \Lambda.$$

Wie findet man die Matrix M, die S diagonalisiert? Dazu formt man die Ähnlichkeitsbedingung um:

$$\begin{aligned} SM &= M\Lambda && (14)\\ S\,(x_1\,x_2) &= (x_1\,x_2)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} && (15)\\ (Sx_1\,Sx_2) &= (\lambda_1 x_1\,\lambda_2 x_2) && (16) \end{aligned}$$

und erkennt, dass das dahinter die Bedingung für die Eigenvektoren „steckt". Wählt man also M als die Eigenvektormatrix von S, dann erhält man die Matrix, mit der die Ähnlichkeitsbedingung zwischen S und Λ erfüllt ist.

Schlussfolgerungen

Hat man eine Matrix A mit Eigenwerten $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ und Eigenvektoren $x_1, \cdots, x_n$, dann gilt:

$$\begin{aligned} A\,(x_1\,\cdots\,x_n) &= (x_1\,\cdots\,x_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} && (17)\\ AX &= X\Lambda && (18) \end{aligned}$$

oder äquivalent:

$$A = X\Lambda X^{-1}.$$

Die Eigenvektormatrizen diagonalisieren also die Matrix A.

Wenn z.B. fragt, was die Eigenwerte von A^2 sind, dann findet man

$$A^2 = X\Lambda X^{-1} X\Lambda X^{-1} = X\Lambda^2 X^{-1},$$

d.h., dass bei A^2 die Eigenwerte quadrieren und die Eigenvektoren identisch sind.

Spektraltheorem

Angewandt auf symmetrische Matrizen S, für die die Eigenvektormatrizen orthogonal sind, Q, ergibt sich:

$$S = Q\Lambda Q^{-1} = Q\Lambda Q^T .$$

Dies folgt auch aus der Anwendung des Spektralsatzes der Spektraltheorie.

Index